На правах рукописи

ЛАЗАРЕВА Оксана Александровна

ЕМКОСТНЫЕ СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СОВЕРШЕННЫХ МНОЖЕСТВ И КОНДЕНСАТОРОВ

01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск 2010

Работа выполнена на кафедре теории функций
Новосибирского государственного университета

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Асеев Владислав Васильевич

Официальные оппоненты
доктор физико-математических наук,
профессор Шлык Владимир Алексеевич
кандидат физико-математических наук,
доцент Тетенов Андрей Викторович

Ведущая организация
Томский государственный университет

Защита состоится "06" апреля 2010 г. в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 в Новосибирском государственном университете по адресу 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан "___" марта 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, доктор
физико-математических наук Макаренко Н. И.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Главным объектом исследований, представленных в диссертации, служит конформная емкость пространственных конденсаторов с равномерно совершенными пластинами и свойства приведенных модулей равномерно совершенных компактных множеств в пространстве.

Понятие емкости конденсатора, возникшее в XIX веке в физике и электротехнике, дало начало развитию математических моделей емкости множеств и конденсаторов, находящих широкое применение в различных областях математики – в том числе, в вещественном и комплексном анализе, в функциональном анализе, в теории дифференциальных уравнений и в разнообразных приложениях этих дисциплин.

Использование конформной емкости в теории пространственных квазиконформных отображений, начавшееся в середине прошлого века с работ Ф. Геринга и Ю.Г. Решетняка, наряду с применением мощного метода модулей семейств кривых (Б. Фюгледе, Б.В. Шабат, В.А. Зорич, Ю. Вяйсяля, И.П. Митюк, Г.В. Кузьмина, В.М. Миклюков, А.В. Сычев, П.М. Тамразов, В.Н. Дубинин, В.А. Шлык и др.), уже доказавшим свою эффективность в решении экстремальных задач теории однолистных аналитических функций (Дж. Дженкинс, Г.В. Кузьмина, В.Н. Дубинин, С.Р. Насыров и др.), способствовало созданию современной теории квазиконформных, квазирегулярных и квазимероморфных отображений, находящей многообразные приложения в смежных областях топологии (теория клейновых групп и многообразий – Л. Альфорс, А. Бердон, Ф. Геринг, Б. Апанасов, А.В. Тетенов и др.), геометрии (теория минимальных поверхностей – В.М. Миклюков, теория орбифолдов – А.Д. Медных, А.Ю. Веснин и др.), математического анализа (анализ на группах Карно и Каратеодори – С.К. Водопьянов, П. Коскела и др.), дифференциальных уравнений эллиптического типа (В.Г. Мазья, Ю.Г. Решетняк, Б. Боярский, Т. Иванец и др.). Теорема о равенстве конформной емкости конденсатора и модуля семейства кривых, соединяющих его пластины, доказанная в самой общей форме В.А. Шлыком в 1993 г., устанавливает эквивалентность методов, основанных на применении емкости конденсаторов и модулей семейств кривых. В настоящее время эти методы играют важную роль в теории соболевских функциональных классов на достаточно общих метрических пространствах (П. Хайлаш, М. Громов, С.К. Водопьянов, П. Коскела, Ю. Хейнонен и др.).

Приведенный модуль – асимптотика конформного модуля конденсатора с вырождающейся пластиной – играет важную роль в теории аналитических функций на протяжении всего XX века, начиная с классических работ Г.Греча и О. Тейхмюллера. Эффективное применение приведенного модуля в геометрической теории функций связано с исследованиями Л.Альфорса и А. Берлинга, Дж. Дженкинса, П. Дюрена и В. Хеймана. Пространственный аналог приведенного модуля, введенный в работах И.П. Митюка и Б.Е. Левицкого, находит применение в теории квазиконформных отображений и емкостной томографии. Мощный импульс развитию теории и приложениям приведенных модулей дали работы В.Н. Дубинина и его учеников – Л.В. Ковалева, Н.В. Эйрих и др., по изучению общего понятия приведенного модуля в системе точек.

Важнейшую роль в теории конформной емкости конденсаторов и теории приведенных модулей играют методы получения оценок для этих величин и свойство непрерывности рассматриваемых емкостных характеристик компактных множеств и конденсаторов относительно топологической сходимости. Известные нижние оценки для конформной емкости конденсатора и верхние оценки для приведенного модуля были получены в литературе только для конденсаторов со связными пластинами и, соответственно, для связных компактов. В тех же условиях были установлены и теоремы сходимости для этих характеристик. Рассмотрение свойства непрерывности конформной емкости для конденсаторов с разрывными пластинами было начато в работах П.М. Тамразова и продолжено исследованиями В.В. Асеева, в которых условие связности пластин конденсатора было заменено условием их равномерной совершенности. Понятие равномерно совершенного множества, введенное на плоскости (Л. Альфорс и А. Берлинг, Ч. Поммеренке), и его обобщение на случай произвольных метрических пространств (П. Тукия и Ю. Вяйсяля, П. Ярви и М. Вуоринен) оказалось весьма плодотворным метрическим аналогом топологической связности и, как показано в данной диссертации, позволяет получить в классе конденсаторов с равномерно совершенными пластинами такие же результаты, какие были получены ранее для конденсаторов со связными пластинами (нижние оценки конформной емкости, верхние оценки приведенного модуля, теоремы сходимости конформной емкости и приведенного модуля относительно топологической сходимости и относительно сходимости к ядру).

Существенная роль условия равномерной совершенности исследуемых множеств и конденсаторов проявляется в современной методике приближенного вычисления логарифмической емкости, трансфинитного диаметра и приведенного модуля, основанной на использовании теоремы фон Неймана о минимаксе из терии игр, разработанной в 2006 г. Т. Рансфордом и Дж. Ростаном (см. http:// www.cirm.univ-mrs.fr/ videos/2006/exposes/15/ Ransford.pdf).

Цель работы. Провести изучение метрико-топологических свойств равномерно совершенных множеств и получить с их использованием качественно новые нижние оценки конформной емкости конденсаторов с равномерно совершенными пластинами и верхние оценки приведенного модуля равномерно совершенных компактов. Получить на основе этих оценок непрерывность конформной емкости в классе равномерно совершенных конденсаторов и непрерывность приведенного модуля в классе равномерно совершенных множеств. Изучить свойство непрерывности приведенного модуля относительно сходимости к ядру – более слабой, чем топологическая сходимость.

Методика исследования. В работе используются методы метрической топологии (при изучении равномерно совершенных метрических пространств и трансфинитного приведенного модуля в полуметрических пространствах). При изучении свойства канторовой связности равномерно совершенных множеств используются методы теории квазиконформных отображений и техника, характерная для теории самоподобных фракталов. Получение основных результатов базируется на использовании методов нелинейной теории потенциала и, в частности, специальной методики получения емкостных оценок, представленной в работах Ю. Вяйсяля, Ф. Геринга, М. Вуоринена, В.А. Шлыка и В.В. Асеева. В главе 4 существенно используются методы работы с приведенными модулями, развитые В.Н. Дубининым и его учениками.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Доказана непрерывность конформного модуля по равномерно совершенной пластине конденсатора, равностепенная относительно произвольного выбора второй пластины из ограниченного семейства компактов ненулевой емкости.

2. Получена существенно новая верхняя оценка конформного модуля равномерно совершенного конденсатора, эффективно применимая в процессе вырождения одной пластины этого конденсатора.

3. В классе равномерно совершенных компактов доказана теорема о непрерывности приведенного модуля и логарифмической емкости относительно топологической сходимости компактных множеств и относительно более слабой сходимости к ядру.

4. Доказано, что величина приведенного модуля на плоскости не изменится, если в его вычислении заменить шары с бесконечно малым радиусом произвольной последовательностью компактных множеств ненулевой емкости, стягивающихся к точке, а радиусы шаров заменить трансфинитными диаметрами этих множеств.

5. Доказано свойство квазиконформной канторовой связности равномерно совершенного компакта, являющееся метрическим аналогом топологической дугообразной связности; показано, что любую пару точек этого множества можно соединить квазиконформным образом классического канторова множества, и получены оценки коэффициента квазиконформности соответствующего отображения.

Теоретическая и практическая значимость. Все результаты, полученные в диссертации имеют теоретическое значение. Как сами результаты, так и методика их получения, могут найти применение в теоретических исследованиях по теории аналитических функций и квазиконформных отображений, математическому анализу и нелинейной теории потенциала, проводящихся в Институте математики Сибирского отделения РАН, в Институте гидродинамики Сибирского отделения РАН, в Санкт-Петербургском отделении математического института им. Стеклова (ПОМИ), в Институте прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, а также в Новосибирском, Томском, Дальневосточном, Кубанском, Волгоградском и Горно-Алтайском государственных университетов. Материалы диссертации могут служить основой специального курса для студентов, специализирующихся в области теории функций и метрической топологии, и являются базой для подготовки соответствующих учебных пособий по этим направлениям.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах. 6 из этих работ написаны в соавторстве с научным руководителем Асеевым В.В., которому принадлежит постановка исследовательских задач и общее руководство по получению и оформлению результатов, представленных в этих работах.

Апробация результатов. Все результаты, включенные в текст диссертации, докладывались по мере их получения на заседаниях исследовательского семинара по геометрической теории функций в Институте математики СО РАН (под рук. А.В. Сычева), а также на следующих конференциях: Конференция "Геометрический анализ и его приложения"(Волгоград, 2004), Международная конференция "Алгебра и анализ"(Казань, 2004), Международная школа-конференция "Комплексный анализ и его приложения"имени профессора И. П. Митюка (Краснодар, 2005).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех основных глав и одной главы-дополнения. Список литературы насчитывает 124 наименования работ отечественных и зарубежных авторов. В конце диссертации имеется глоссарий основных терминов, использованных в тексте диссертации. Общий объем работы – 174 страницы текста, набранного с использованием пакета LATEX.

Содержание работы

Во **введении** приводится обзор имеющейся в литературе основной проблематики и результатов по направлениям, связанным с исследованиями, выполненными в диссертации. Дается описание основных задач, на решение которых направлена данная работа, и их связь в имеющимися аналогами. Более подробная информация о предыстории конкретных понятий и методов, используемых в тексте, приведена непосредственно в соответствующих параграфах, где вводятся эти понятия. Во введении дается краткое содержание диссертации по главам с описанием новых результатов, полученных автором.

В **первой главе** дано описание используемой символики и основных понятий из теоретико-множественной топологии, метрической топологии и теории отображений и, в частности, определения конформной емкости и конформного модуля конденсаторов. Приведены с указанием источников основные теоремы о свойствах конформной емкости, и, в том числе, теорема Геринга о непрерывности конформного модуля кольцевых областей относительно топологической сходимости. Приведено общее определение и свойства трансфинитного диаметра и трансфинитного модуля в полуметрических пространствах. Первая глава не содержит новых результатов и имеет вспомогательный характер.

Вторая глава посвящена описанию основных метрических свойств равномерно совершенных компактов в пространстве $\bar{R}^n$. В параграфе 2.1 этой главы проведен подробный сравнительный анализ различных вариантов определения равномерной совершенности (Бердон, Поммеренке, Ярви и Вуоринен и др.), близкого к ним понятия однородной плотности подмножеств метрического пространства (Тукиа, Вяйсяля) и понятия μ-плотности (Ибрагимов). Отмечается связь между числовыми характеристиками в этих определениях и дается краткий обзор тех свойств равномерно совершенных множеств, которые оказались существенно важными для использования их в задачах теории потенциала и фактически послужили мотивировкой появления самого понятия равномерной совершенности. В этом же параграфе сформулирована основная концепция применения равномерно совершенных множеств: во многих теоремах теории потенциала и теории отображений свойство континуальности может быть успешно заменено свойством равномерной совершенности, что приводит к существенному усилению ряда классических результатов.

В качестве двух основных определений рассматриваемого класса компактных множеств в диссертации используются:

2.1.4. Определение (емкостное определение равномерной совершенности). Пусть замкнутое множество $E \subset \bar{R}^n$ содержит не менее двух различных точек, и пусть $\alpha > 0$. Множество E называется *α-равномерно совершенным* (множеством класса $UP_\alpha(\bar{R}^n)$), если не существует кольцевой области $D \subset \bar{R}^n \setminus E$, которая разбивает множество A и имеет конформный модуль $> \alpha$. Множество E в $\bar{R}^n$ называем *равномерно совершенным*, если оно α-равномерно совершенно для некоторого $\alpha > 0$.

2.1.10. Определение (метрическое определение равномерной совершенности). Пусть в метрическом пространстве X с метрикой ρ задано замкнутое подмножество E, содержащее не менее трех различных точек, и пусть $0 < \beta < 1$. Множество E называем *β-однородно плотным* (множеством класса $HD_\beta(X)$), если для любой тройки различных точек $a, b, w \in E$ и любого r, $0 < r \leq 1$, существует точка $c \in E$ такая, что

$$\beta r \leq \frac{\rho(a,c)\rho(b,w)}{\rho(a,b)\rho(c,w)} \leq r.$$

Множество E называем *однородно плотным*, если оно β-однородно плотно с некоторым $0 < \beta < 1$.

Связь между свойством равномерной совершенности и однородной плотности в пространстве $\bar{R}^n$ устанавливается в следующем утверждении:

2.1.11. Теорема. *Для любого замкнутого множества $E \subset \bar{R}^n$, имеющего не менее трех различных точек:*

(1) из α-равномерной совершенности следует его β-однородная плотность с $\beta = e^{-\alpha}$;

(2) из β-однородной плотности следует его α-равномерная совершенность с $\alpha = \Psi_n(1/\beta)$.

В §2.2 семейство $HD_\beta(X)$ всех β-однородно плотных компактов (с фиксированным параметром $\beta \in (0,1)$) в компактном метрическом пространстве X рассмотрено как подмножество гиперпространства $\mathrm{Comp}(X)$ всех непустых компактных подмножеств, снабженного метрикой Хаусдорфа. Доказано

2.2.5. Теорема. *Пусть X – компактное метрическое пространство, $Singl(X)$ – семейство всех его одноточечных подмножеств. Тогда для любого фиксированного $\beta \in (0,1)$ и семейства $HD_\beta(X)$ всех β-однородно плотных компактных подмножеств пространства X множество $HD_\beta(X) \cup Singl(X)$ есть компактное подмножество в гиперпространстве $Comp(X)$. Аналогично, для любого фиксированного $\alpha > 0$ и семейства $UP_\alpha(\bar{R}^n)$ всех α-равномерно совершенных компактных подмножеств пространства $\bar{R}^n$ множество $UP_\alpha(\bar{R}^n) \cup Singl(\bar{R}^n)$ есть компактное подмножество в гиперпространстве $Comp(\bar{R}^n)$.*

Эта теорема является аналогом известной теоремы Зоретти о компактности семейства всех континуумов в компактном метрическом пространстве, что подкрепляет аналогию между равномерно совершенными множествами и континуумами.

Содержательным смысловым ядром главы II является §2.3, в котором рассмотрено характерное метрическое свойство равномерно совершенных множеств, аналогичное свойству дугообразной связности континуумов в общей топологии. Замена в обычном определении дугообразной связности класса жордановых дуг – «соединителей» – на класс K-квазиконформных образов классического канторова множества естественно приводит к новому понятию *канторовой K-квазиконформной связности* подмножеств пространства $\bar{R}^n$, инвариантному относительно мебиусовых преобразований. Возникающее при этом понятие метрической связности градуировано числовой характеристикой K и может привести в дальнейшем к интересным результатам в применении к метрической мебиусово-инвариантной классификации областей в пространстве $\bar{R}^n$. Основным результатом этой главы является

2.3.9. Теорема *Любое α-равномерно совершенное множество в $\bar{R}^n$ является канторово K-квазиконформно связным с оценкой для K, зависящей только от n и α.*

Верно и обратное

2.3.10. Теорема *Любое канторово K-квазиконформно связное множество является α-равномерно совершенным с оценкой для α, зависящей только от K и n.*

Доказательство теоремы 2.3.9 конструктивно: для заданной пары точек a, b в равномерно совершенном множестве $E \subset \bar{R}^n$ непосредственно строится квазиконформный автоморфизм пространства $\bar{R}^n$, переводящий классическое канторово множество на координатной оси в канторову дугу $\gamma \subset E$ с концами в заданных точках. Теорема 2.3.9 является существенным (и довольно трудоемким) уточнением на случай пространства $\bar{R}^n$ аналогичного результата, полученного Ибрагимовым (2002 г.) для равномерно совершенных множеств в произвольном метрическом пространстве с использованием квазимебиусовых вложений канторова множества в это пространство.

Третья глава посвящена изучению емкостных свойств конденсаторов с равномерно совершенными пластинами в пространстве $\bar{R}^n$ с основным упором на получение нижних оценок конформной емкости таких конденсаторов, выраженных через метрические мебиусово-инвариантные характеристики, связанные с относительными размерами пластин и их удалением друг от друга. При этом дается обобщение на равномерно совершенный случай нижних оценок, известных для конформной емкости конденсаторов со связными пластинами.

В §3.1 отмечены некоторые важные емкостные свойства равномерно совершенных конденсаторов в $\bar{R}^n$, включая полученную Асеевым (1999 г.) нижнюю оценку конформной емкости конденсатора с равномерно совершенными пластинами, соединяющими граничные сферы достаточно толстого шарового слоя.

Параграф §3.2 посвящен вопросам существования экстремальной допустимой функции для конформной емкости обобщенного конденсатора $(E^-, E^+; D)$ с равномерно совершенными пластинами $E^-, E^+ \subset D$. Приведен краткий обзор результатов из работ Ладыженской, Уральцевой и Мазьи, Хавина по задаче Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа в дивергентной форме, связанного с этой проблемой в случае $D = R^n$. В этом параграфе приводится

3.2.10. Теорема *о равностепенной непрерывности на компактах в области $D \subset R^n$ любого семейства таких допустимых функций для обобщенного конденсатора $(E^-, E^+; D)$ с равномерно совершенными пластинами $E^-, E^+ \subset D$, которые имеют равномерно ограниченный интеграл Дирихле и монотонны в области D в смысле Асеева-Сычева.*

Чуть бо́льшая общность этого результата по сравнению с имеющимися аналогами (например, в работах Мартио) для случая $D = R^n$ заключается в том, что в краевых условиях соответствующей задачи Дирихле в случае обобщенного конденсатора $(E^-, E^+; D)$ присутствует ∂D – "свободная" часть границы поля конденсатора, на которой допустимые функции не связаны никакими условиями. Из теоремы 3.2.10 стандартным способом выводится теорема 3.2.12 о существовании экстремальной функции для обобщенного конденсатора:

3.2.12. Теорема. *(Об экстремальной функции). Пусть $U \subset R^n$ и пластины обобщенного конденсатора $(E^-, E^+; U)$ являются равномерно совершенными множествами, лежащими в U. Тогда существует и единственна такая допустимая для этого конденсатора функция $u \in Adm(E^-, E^+; U)$, что $\int_U |\nabla u(x)|^n dx = Cap(E^-, E^+; U)$.*

В конце параграфа отмечены некоторые специальные свойства экстремальной функции, используемые в дальнейшем тексте.

Основной результат третьей главы содержится в §3.3. Это

3.3.3. Теорема *о равностепенной непрерывности (в метрике Хаусдорфа) конформного модуля конденсатора (E, K) в пространстве $\bar{R}^n$ по его α-равномерно совершенной пластине E относительно произвольного выбора второй пластины K из семейства компактных множеств ненулевой емкости (не обязательно равномерно совершенных), содержащихся в некотором шаре.* Более точно: *Имеет место верхняя оценка вида*

$$|\mathrm{Mod}(E_1, K) - \mathrm{Mod}(E_2, K)| \le F(n, \alpha, (d/\mathrm{dist}_q(E_1, E_2))),$$

где d есть минимум хордовых диаметров α-равномерно совершенных пластин E_1, E_2; $\mathrm{dist}_q(E_1, E_2)$ – хаусдорфово расстояние между этими множествами, а K – произвольный компакт ненулевой емкости, находящийся *от* $E_1 \cup E_2$ *на хаусдорфовом удалении* $\geq d$. *Эта оценка не зависит от* K *и стремится к нулю при* $\mathrm{dist}_q(E_1, E_2) \to 0$.

При этом сами конформные модули могут быть сколь угодно большими величинами. Эта теорема является существенным уточнением теоремы Асеева (1999 г.) о непрерывности конформной емкости в классе конденсаторов с равномерно совершенными пластинами. Она эффективно используется в следующей главе для доказательства свойства непрерывности логарифмической емкости α-равномерно совершенных компактов в R^n.

В §3.4 решается задача о получении нижних оценок конформной емкости конденсатора (E^-, E^+) с α-равномерно совершенными пластинами. Показано, почему обычные методы симметризации, используемые для получения таких оценок в случае конденсаторов со связными пластинами, не дают содержательных оценок в случае равномерно совершенных пластин типа канторовой пыли. Главные требования к искомым оценкам – их мебиусовая инвариантность и зависимость только от геометрических характеристик конденсатора, связанных с диаметром пластин и расстоянием между ними. Образцом для этих оценок должны были служить известные нижние оценки конформной емкости конденсаторов со связными пластинами, указанные в монографии Вуоринена. Решение поставленной задачи представлено двумя теоремами этого параграфа, дающими нижнюю оценку конформной емкости $\mathrm{Cap}(E^-, E^+)$, выраженную через мебиусово-инвариантную геометрическую характеристику

$$q = \max_{a_1, a_2 \in E^-; b_1, b_2 \in E^+} \frac{|a_1 - a_2||b_1 - b_2|}{|a_1 - b_1||a_2 - b_2|}$$

конденсатора E^-, E^+.

3.4.2. Теорема. *Пусть пластины конденсатора* (E^-, E^+) *в пространстве* $\bar{R}^n$ *являются* α*-равномерно совершенными множествами, и пусть* $q > 1 + 2e^{\alpha}$. *Тогда*

$$Cap(E^-, E^+) > C(n, \alpha) Ln\ q,$$

где $C(n, \alpha)$ *– положительная константа, зависящая от* n *и* α.

3.4.3. Теорема. *Пусть пластины конденсатора* (E^-, E^+) *являются* α*-равномерно совершенными множествами в* $\bar{R}^n$. *Тогда*

$$Cap(E^-,E^+) \geq \frac{1}{3^n}\min\left\{C_2(\alpha,n), \omega_{n-1}/\left[\Psi_n\left(\frac{(2q+1)^2}{q}\right)\right]^{n-1}\right\},$$

где $C_2(\alpha,n)$ *– положительная константа, зависящая от* n *и* α *.*

При этом первая оценка (теорема 3.4.2) содержательна при больших значениях q, а вторая оценка (теорема 3.4.3) эффективна при малых значениях q.

Однако оценка конформного модуля, указанная в теореме 3.4.3, содержит множитель, который препятствует ее применению для исследования асимптотики конформного модуля при стягивании в точку одной из пластин конденсатора. В этой ситуации оказывается полезной верхняя оценка конформного модуля равномерно совершенного конденсатора, которая получена в Теореме 3.4.4.

3.4.4. Теорема. *Пусть* (E^-,E^+) *– конденсатор с* α*-равномерно совершенными пластинами в пространстве* $\bar{R}^n$*. Пусть*

$$\delta_0 = \frac{\min\{d_q(E^-,E^+), diam_q(E^-)\}}{4(1+2e^\alpha)}; \quad \delta_1 = \frac{\min\{d_q(E^-,E^+), diam_q(E^+)\}}{4(1+2e^\alpha)}.$$

Тогда

$$Mod(E^-,E^+) \leq C_3(n,\alpha) + 2Arsh\sqrt{\left(1+\frac{d_q(E^-,E^+)}{\delta_0}\right)\left(1+\frac{d_q(E^-,E^+)}{\delta_1}\right)}.$$

Эта оценка не имеет известных аналогов и ее вывод основан на использовании теоремы 3.3.3 – основной теоремы этой главы.

В **четвертой главе** изучаются свойства приведенного модуля равномерно совершенных множеств в пространстве $\bar{R}^n$.

4.1.3. Определение. *Евклидовым приведенным модулем множества* E *в точке* a мы будем называть величину

$$m(E;a) = \lim_{r\to 0}\left[\mathrm{Mod}(E,\bar{B}(a,r)) - \mathrm{Ln}\tfrac{1}{r}\right] \qquad \text{в случае } a \neq \infty, \text{ и}$$
$$m(E;\infty) = \lim_{R\to\infty}\left[\mathrm{Mod}(E,\bar{R}^n\setminus B(0,R)) - \mathrm{Ln}\ R\right] \text{ в случае } a=\infty.$$

В первом параграфе главы IV дается краткий исторический обзор развития понятия приведенного модуля и его применений в теории функций; описана его связь с другими понятиями – конформным радиусом области, логарифмической емкостью компакта и трансфинитным диаметром. Для удобства терминологии, вводится определение приведенного модуля $m_\rho(E;x)$ компактного множества E в метрическом пространстве (X,ρ) в точке $a \notin E$, которое в случае евклидова пространства R^n совпадает с классическим приведенным модулем области – той связной компоненты дополнения к E, которая содержит точку a.

Это обобщение позволяет наряду с евклидовым приведенным модулем $m(E;x)$ рассматривать и *хордовый приведенный модуль* $m_q(E;x)$, вычисленный в хордовой метрике пространства $\bar{R}^n$.

4.1.7. Определение. *Хордовым приведенным модулем множества E в точке a* мы будем называть величину

$$m_q(E;a) = \lim_{s\to 0}\left[\mathrm{Mod}(E,\bar{Q}(a,s)) - \mathrm{Ln}\tfrac{1}{s}\right].$$

Отмечены преимущества такого подхода и указаны формулы, отражающие связь между евклидовой и хордовой версиями приведенного модуля. В этом же параграфе введено понятие *трансфинитного приведенного модуля*, получаемое использованием трансфинитного модуля конденсатора в метрическом пространстве вместо конформного модуля. С использованием теоремы Бэгби, утверждающей совпадение на плоскости трансфинитного и конформного модуля конденсатора, получено (**4.1.10Следствие**) существенно новое свойство классического приведенного модуля, показывающее, что *мы получим ту же самую величину, если в определении приведенного модуля $m(E;z_0)$ последовательность шаров $B(z_0,r_j)$ с $r_j \to 0$ заменим на произвольную последовательность $\{\gamma_j\}$ компактов ненулевой емкости, стягивающихся при $j\to\infty$ к точке z_0, а вместо радиуса r_j этих шаров будем использовать трансфинитный диаметр $\tau(\gamma_j)$.*

Также отмечено (**4.1.11 Следствие**), что *евклидов приведенный модуль $m(E;z_0)$ на плоскости совпадает с логарифмом величины, обратной к трансфинитному диаметру множества E, вычисленному в полуметрике $\rho(x,y) = |x-y|/(|x-z_0|\cdot|y-z_0|)$.*

В §4.2 дается простая нижняя оценка приведенного модуля в $\bar{R}^n$ и отмечается, что в общем случае не существует верхних оценок приведенного модуля компакта $m(E;z_0)$, выраженных через его диаметр и расстояние до точки z_0, аналогичных известным оценкам для случая континуума E. Однако, в случае α-равномерно совершенного компакта $E\subset\bar{R}^n$ получена (**4.2.2 Теорема**) *верхняя оценка для приведенного модуля $m_q(E;a)$, выра-*

женная через диаметр множества E и расстояние от точки a до этого множества. Эта теорема существенно использует теорему 3.3.3 третьей главы и является основным результатом в параграфе 4.2.

Следующий параграф 4.3 содержит один из главных результатов диссертации – теорему о непрерывности (хордового) приведенного модуля $m_q(E; a)$ как вещественной функции на семействе α-равномерно совершенных компактов относительно топологической сходимости:

4.3.4 Теорема. *Если последовательность α-равномерно совершенных компактов E_j в пространстве $\bar{R}^n$ имеет топологический предел $E = \mathrm{Lim}_{j\to\infty} E_j$ и $a \neq E$, то $\lim_{j\to\infty} m_q(E_j; a) = m_q(E; a)$.*

В качестве следствия для множеств на плоскости получено (**4.3.5 Следствие**) свойство *непрерывности трансфинитного диаметра в классе α-равномерно совершенных компактов.*

В последнем параграфе главы IV доказанное выше свойство непрерывности приведенного модуля в классе α-равномерно совершенных компактов распространяется на случай сходимости компактов к ядру

4.4.3. Теорема. *Пусть в $\bar{R}^n$ имеется последовательность $\{E_j\}$ компактных α-равномерно совершенных множеств, не содержащих точку a. Если эта последовательность сходится к компактному множеству E как к ядру относительно точки $a \notin E$, то*

$$\lim_{j\to\infty} m_q(E_j; a) = m_q(E; a).$$

Здесь используется теория сходимости к ядру в пространстве конденсаторов, разработанная Асеевым и Сычевым. В частности, применяется доказанная ими в общем случае теорема о том, что если на некотором семействе конденсаторов, замкнутом относительно операции заполнения и топологической сходимости, задана вещественная функция инвариантная относительно операции заполнения и непрерывная относительно топологической сходимости конденсаторов, то она будет непрерывна и по отношению к сходимости к ядру. Возможность применения этой теоремы к приведенному модулю предоставляет полученная выше теорема 4.3.4 (с учетом теоремы 2.2.4).

В последнюю главу **D. Дополнения** вынесены доказательства некоторых вспомогательных утверждений и лемм, не имеющие признаков несомненной новизны.

Публикации по теме диссертации

[1]. Асеев В. В., Лазарева О. А. Отображения полуметрических пространств, сохраняющие трансфинитные модули.// Матер. конф. "Геометрический анализ и его приложения". – Волгоград. – 2004. – С. 12-14.

[2]. Асеев В. В., Лазарева О. А. О непрерывности приведенного модуля и трансфинитного диаметра.// Матер. междунар. конф. "Алгебра и анализ". – Казань. – 2004. – С. 80-81.

[3] Асеев В.В., Лазарева О.А. Трансфинитные диаметры и модули конденсаторов в полуметрических пространствах.// – Дальневосточн. матем. ж. – 2004. – Т. 5. – No 1. – Стр. 12-21.

[4]. Асеев В. В., Лазарева О. А. О непрерывности приведенного модуля и трансфинитного диаметра.// Докл. Ак. наук. – Том 402 № 5 – 2005. – С. 583-585.

[5]. Лазарева О. А. Непрерывность приведенного модуля и сходимость к ядру.// Тезисы докл. междунар. шк.-конф. "Комплексный анализ и его приложения"им. проф. И.П. Митюка. – Краснодар. – 2005. – С. 61.

[6]. Асеев В. В. Кузин Д. Г. Лазарева О. А. Трансфинитный диаметр. Часть I. Определения и основные свойства.// Уч.-мет. пособие к курсу "Геометрическая теория функций и отображений". – Новосибирск. – 2005. – 56 стр.

[7]. Асеев В. В. Лазарева О. А. О непрерывности приведенного модуля и трансфинитного диаметра.// Изв. Вузов. Матем. – Казань. – № 10. – 2006. – С. 10-18.

[8]. Лазарева О. А. О некоторых свойствах приведенного модуля в пространстве.// Сиб. мат. ж. – Том 49, №1. – 2008. – С. 145-152.